CHAPITRE 6

La transformée de Fourier

1. Exercices

Dans les corrections, on choisit la normalisation suivante pour la transformée de Fourier :

$$\widehat{v}(\xi) = \int v(x) e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx.$$

Le passage d'une normalisation à une autre n'implique généralement que des constantes multiplicatives dont le calcul est facile.

1. Calculs et propriétés élémentaires.

a. Calculer la transformée de Fourier de la mesure de Dirac δ_1.
b. Soient $a > 0$ un réel et f la fonction *train d'onde* $f : x \mapsto \sin x\, \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f. Décrire en une phrase ce qui se passe quand a tend vers $+\infty$.
c. Calculer les transformées de Fourier sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto e^{-|x|}$ et de $g : x \mapsto 1/(1+x^2)$.
d. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on ait $f * g = g$.
e. Calculer la transformée de Fourier de la mesure de surface de la sphère de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Régularité de la transformée de Fourier. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
a. Si la fonction identité x est dans $L^1(\mu)$, montrer que $\hat{\mu}$ est de classe C^1 et que

$$\hat{\mu}'(u) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x e^{-2i\pi u x}\, \mu(dx).$$

b. Si la fonction identité x est dans $L^2(\mu)$, montrer que $\hat{\mu}$ est de classe C^2 et que

$$\hat{\mu}''(u) = -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2i\pi ux}\,\mu(dx).$$

3. Non surjectivité de la transformation de Fourier. Soit

$$\theta(x) = \int_1^x \frac{e^{-i2\pi u}}{u}\,dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle possède une limite finie à l'infini.

b. Montrer que, si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et si $\widehat{f}$ est sa transformée de Fourier, l'expression

$$\phi(\Xi) = \int_1^{\Xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi$$

a une limite finie quand Ξ tend vers $+\infty$.

Soit g la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1/\ln x & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

c. Montrer que g est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$, mais que g n'est la transformée de Fourier d'aucune fonction intégrable.

4. Équation de propagation. Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est l'amplitude d'une onde (de nature électromagnétique, acoustique, etc.) vue comme une fonction des variables spatiale et temporelle x et t, on montre en Physique que sous certaines hypothèses f est de classe C^2 et satisfait à l'*équation de propagation*

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

où c est une constante, la *célérité*, qui dépend de la nature de l'onde et du milieu dans lequel l'onde se propage, et Δ est l'opérateur *laplacien* : $\Delta f(x,t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

L'expérience montre en outre que l'on peut librement imposer l'amplitude $f_0(x) = f(x,0)$ et et sa dérivée temporelle $g_0(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0)$ à l'instant $t = 0$.

La clef de la résolution de cette équation de propagation est d'introduire la transformée de Fourier *spatiale* de f, c'est-à-dire la fonction

$$\hat{f} : (u,t) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\langle u,x\rangle} f(x,t)\, dx.$$

Nous supposerons que les fonctions $u \mapsto (1+||u||^2)\hat{f}(u,t)$, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\cdot,t)$ et $\dfrac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}(\cdot,t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^n$ par rapport à la variable u pour tout $t \in \mathbb{R}$.

a. Trouver l'équation et les conditions initiales satisfaites par $\hat{f}$ et déterminer $\hat{f}$ en fonction de $\hat{f}_0$ et $\hat{g}_0$.

b. Écrire f presque partout sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant de f_0 et de g_0.

5. Équation de diffusion de la chaleur. Soit $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ à support compact satisfaisant l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x)$$

pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$, où $\Delta u(t,x) = \displaystyle\sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t,x)$ dénote le laplacien de u. On suppose de plus que u satisfait la condition initiale $u(0,x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ à support compact.

On appellera *transformée de Fourier spatiale* de u et on notera $\widehat{u} : \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t,\xi) \mapsto \widehat{u}(t,\xi)$ la fonction, si elle existe, telle que pour tout $t > 0$ la fonction $\widehat{u}(t,\cdot) : \xi \mapsto \widehat{u}(t,\xi)$ soit la transformée de Fourier de la fonction $u(t,\cdot) : x \mapsto u(t,x)$.

a. Justifier l'existence des fonctions $\widehat{u}$, $\widehat{\Delta u}$ et $\widehat{\dfrac{\partial u}{\partial t}}$.

b. Montrer en intégrant par parties qu'il existe un réel $c > 0$ (qui dépend de la normalistion choisie pour la transformation de Fourier) tel que $\widehat{\Delta u}(t,\xi) = -c\,\|\xi\|^2\,\widehat{u}(t,\xi)$.

c. En déduire que $\dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -c\,\|\xi\|^2\,\widehat{u}(t,\xi)$.

d. En déduire que

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-ct\|\xi\|^2}.$$

e. En déduire que quel que soit $t > 0$ la fonction $u(t,\cdot)$ est la convolée spatiale suivante :

$$(S)\quad u(t,x) = \left(\mathcal{N}(t,\cdot) * \varphi\right)(x),\ \text{avec}\ \mathcal{N}(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\|x\|^2/(4t)}.$$

f. Si φ est positive et non identiquement nulle, la fonction u est-elle à support compact comme supposé ? Conclure !

Soit maintenant $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

g. Montrer que la formule (S) définit une solution de l'équation de la chaleur de classe C^∞, sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$. La fonction u est-elle définie sur $\mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}^n$?

h. Montrer que $u(t,\cdot)$ converge vers φ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ quand t tend vers 0.

(L'unicité de la solution u lorsque $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ne résulte pas de ce qui précède et sa démonstration utilise la Théorie des Distributions.)

Pour tout $t > 0$ on note $e^{t\Delta} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur $\varphi \mapsto u(t,\cdot) = \mathcal{N}(t,\cdot) * \varphi$.

i. Montrer que $e^{t\Delta}$ définit un opérateur continu $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

j. Montrer que, si φ est de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^n$, $\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}$ et en déduire que l'opérateur $e^{t\Delta}$ se prolonge de façon unique en un endomorphisme continu $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

k. Montrer, quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathrm{L}^2$, que la fonction $e^{t\Delta}\varphi$ satisfait l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ et que $u(t,\cdot)$ converge vers φ dans L^2 quand t tend vers 0.

l. (Question subsidiaire) Interpréter $\mathcal{N}$ comme une solution de l'équation de la chaleur pour une certaine condition initiale φ à déterminer parmi les mesures positives sur $\mathbb{R}^n$.

6. Équivalent d'une intégrale de Fresnel. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ nulle en dehors d'un intervalle $[-A, A]$. Pour tout nombre complexe $t = t_1 + it_2$ de partie imaginaire $\operatorname{Im} t = t_2$ strictement positive, soit $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction complexe telle que

$$f_t(x) = e^{itx^2} = e^{-t_2x^2 + it_1x^2}.$$

On veut établir un équivalent de l'intégrale

$$I_t = \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} \phi(x)\, dx$$

quand $\operatorname{Re} t = t_1$ tend vers $+\infty$.

a. Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f_t}$ de la fonction $f_t : x \mapsto e^{itx^2}$ existe et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer en faisant une intégration par parties le nombre complexe a tel que

$$\widehat{f_t}'(u) + a\frac{u}{t}\widehat{f_t}(u) = 0$$

et en déduire l'expression de $\widehat{f_t}$ à une constante multiplicative près.

c. Déterminer cette constante en calculant $\widehat{f_t}(0)$ (on pourra calculer le carré de ce nombre, utiliser le théorème de Fubini puis passer en coordonnées polaires).

On admettra que $\hat{\phi}(u)$ et $u\hat{\phi}(u)$ sont dans $L^1(du)$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(u)\, e^{i2\pi ux}\, du.$$

d. Calculer la dérivée de ϕ en fonction de $\hat{\phi}$.

On rappelle que l'on a

$$e^z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$$

pour tout nombre complexe z.

e. Montrer que

$$I_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \left(\phi(0) - \frac{\pi}{t}\phi'(0) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right).$$

7. Rotations irrationnelles et séries de Fourier. Considérons l'intervalle $E = [0, 1[$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ et de la mesure de Lebesgue λ, et f l'application $x \mapsto x + \alpha \pmod 1$ de E dans lui-même, où α est un nombre réel.

Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Cette dernière est *presque f-invariante* si λ-presque partout on a $\varphi \circ f = \varphi$.

a. Donner un exemple de fonction mesurable f-invariante non constante avec $\alpha = 1/2$.

b. Calculer les coefficients de Fourier de $\varphi \circ f$ en fonction de ceux de φ.

c. Montrer que si α est irrationnel et si la fonction φ est f-invariante, φ est constante presque partout (c'est-à-dire que φ prend une valeur réelle fixée sauf sur un borélien négligeable). L'application f est alors qualifiée d'*ergodique*.

Une partie $A \in \mathcal{E}$ est *presque f-invariante* si sa fonction indicatrice l'est.

d. Montrer que si α est irrationnel, les seules parties presque f-invariantes sont négligeables ou de complémentaire négligeable.

e. Interpréter succintement cette dernière propriété.

8. Théorème central limite. Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace probabilisé et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions réelles de $L^2(\mu)$.

a. Pourquoi les fonctions f_n sont-elles intégrables ? (On pourra utiliser l'inégalité $|x| \leq 1 + x^2$ sur $\mathbb{R}$).

On supposera que pour tout $n \geq 1$, pour tout pavé borélien $A_1 \times ... \times A_n$ de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\mu\left(\{x \in E,\ (f_1(x), ..., f_n(x)) \in A_1 \times ... \times A_n\}\right)$$
$$= \mu\left(\{x_1 \in E,\ f_1(x_1) \in A_1\}\right) ... \mu\left(\{x_n \in E,\ f_n(x_n) \in A_n\}\right) \ ;$$

on dit que les fonctions f_n sont (mutuellement) *indépendantes* ; voir l'Exercice sur l'indépendance dans le chapitre sur les produits de mesures pour une justification de cette définition.

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$ la mesure de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, image de μ par l'application $(f_1, ..., f_n) : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_2(x))$, égale le produit tensoriel des images de μ par les fonctions f_n :

$$(f_1, ..., f_n)_*\mu = (f_{1*}\mu) \otimes ... \otimes (f_{n*}\mu),$$

c. Si $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $h \circ (f_1, ..., f_n)$ est μ-intégrable, montrer l'égalité :

$$\int_E h(f_1(x), ..., f_n(x))\, d\mu(x) = \int_{E^n} h(f_1(x_1), ..., f_n(x_n))\, d\mu^{\otimes n}(x_1, ..., x_n).$$

Pour tout $n \geq 1$, considérons la fonction S_n définie par

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(f_1 + ... + f_n\right),$$

et notons σ_n la mesure image de μ par S_n.
d. Justifier que la transformée de Fourier $\hat{\sigma}_n$ de σ_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue.

On supposera de plus que pour tout $n \geq 1$ l'image de μ par f_n est une mesure ν indépendante de n (on dit que les fonctions f_n sont *identiquement distribuées*).
e. En utilisant la question (c), montrer que

$$\hat{\sigma}_n(u) = \left(\hat{\nu}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n,$$

où $\hat{\nu}$ est la transformée de Fourier de ν.
f. Montrer que $\hat{\nu}$ est de classe C^2.

On supposera de plus que pour tout entier $n \geq 1$ l'intégrale de f_n est nulle et l'intégrale de ${f_n}^2$ égale 1.
g. Calculer le développement limité de $\hat{\nu}$ à l'ordre 2 en 0.
h. Montrer que quand n tend vers $+\infty$ la suite $(\hat{\sigma}_n)_{n\geq 1}$ tend simplement vers la fonction ζ donnée par

$$\zeta(u) = e^{-2\pi^2 u^2}.$$

On *admettra* qu'alors la suite des mesures σ_n *tend faiblement* vers la mesure de densité

$$\sigma : y \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi uy}\zeta(u)\, du$$

par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, d\sigma_n(y) \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, \sigma(y)\, dy.$$

i. Montrer que σ est une fonction dérivable et écrire l'expression de σ'. Exprimer σ' en fonction de σ en faisant une intégration par partie, puis en déduire l'expression de σ à une constante multiplicative près. Déterminer cette constante en examinant $\sigma(0)$.

j. Tracer le graphe de σ. Justifier rapidement de l'intérêt du résultat démontré, dans la situation où une mesure expérimentale est perturbée par un grand nombre de fluctuations aléatoires.

2. Solutions

1. Calculs et propriétés élémentaires.
Correction.

a. La transformée de Fourier de la mesure de Dirac δ_1 est la fonction

$$\phi : u \mapsto \int e^{-i2\pi xu}\, d\delta_1(x) = e^{-i2\pi u}.$$

b. En utilisant le fait que $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, un calcul direct montre que la transformée de Fourier du train d'onde est la fonction ϕ telle que

$$\phi(u) = \int_{-a}^{a} \sin x\, e^{-i2\pi xu}\, du = -ia(\mathrm{sinc}\ (2\pi a(1+u)) + \mathrm{sinc}\ ((2\pi a(1-u))),$$

où sinc : $v \mapsto \sin v/v$ si $v \neq 0$, $0 \mapsto 1$, est la fonction *sinus cardinal.* Quand $a \to +\infty$, le graphe de ϕ montre deux pics de plus en plus aigus et étroits en $u = 1$ et $u = -1$, qui correspondent aux deux harmoniques de la fonction $x \mapsto \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

c. On a

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-2i\pi ux}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-2i\pi u)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+2i\pi u)x}\, dx,$$

donc

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{1-2i\pi u} + \frac{1}{1+2i\pi u} = \frac{2}{1+4\pi^2 u^2}.$$

Posons $h(x) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction h est intégrable relativement à la mesure de Lebesgue. Par la formule d'inversion des transformées de Fourier, $f(x) = \hat{h}(-x)$ presque partout, donc partout puisque ces fonctions sont continues. Or, h est une fonction paire, donc $f(x) = \hat{h}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\hat{g}(u) = \pi \hat{h}(2\pi u) = \pi f(2\pi u) = \pi e^{-2\pi|u|}.$$

d. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ une fonction telle que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on ait $f * g = g$. On a $\hat{g} = \hat{f}\hat{g}$. Prenons $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, $x \in \mathbb{R}$. Or on a $\hat{g}(u) = \exp(-2\pi^2 u^2) \neq 0$. Donc pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a $\hat{f}(u) = 1$. Or on a $\lim_\infty \hat{f} = 0$, ce qui est absurde.

Donc il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on ait $f * g = g$.

e. La mesure de surface de la sphère de rayon R est la mesure σ_R image par l'application coordonnées sphériques $(\theta, \varphi) \mapsto (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$ de la mesure $R^2|\sin\varphi|\, d\varphi\, d\theta$ (voir l'exercice sur les intégrales de surfaces). Elle est finie de masse (surface) totale $4\pi R^2$.

Sa transformée de Fourier vaut

$$\widehat{\sigma_R}(\xi) = \int_{|x|=R} e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, d\sigma_R(x).$$

Un vecteur ξ étant donné, on peut toujours définir les coordonnées sphériques de façon à ce que ξ soit sur l'axe $\varphi = 0$ (ce qui revient à dire que σ_R est invariante par rotation). Alors la formule d'intégration par rapport à une mesure image montre que l'on a

$$\widehat{\sigma_R}(\xi) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i2\pi R|\xi|\cos\varphi} R^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi = 2R^2 \frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|},$$

ou encore, pour la surface unité sur la sphère,

$$\widehat{\frac{\sigma_R}{4\pi R^2}}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|}.$$

2. Régularité de la transformée de Fourier.

Correction.

a. Par définition, $\hat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux}\,\mu(dx)$. Or, $\frac{\partial}{\partial u} e^{-2i\pi ux} = -2i\pi x e^{-2i\pi ux}$, et, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial}{\partial u} e^{-2i\pi ux}\right| \leq 2\pi x$, cette dernière fonction, par hypothèse, étant intégrable. Donc d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, $\hat{\mu}$ est dérivable et sa dérivée vaut

$$\hat{\mu}'(u) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x\, e^{-2i\pi ux}\,\mu(dx).$$

La même Proposition, appliquée cette fois à $\hat{\mu}'$, affirme que $\hat{\mu}'$ est continue.

b. Le raisonnement est identique au niveau de dérivation suivant.

3. Non surjectivité de la transformation de Fourier.

Correction.

a. Cette question a déjà été traitée dans les chapitres sur les passages à la limites et sur le théorème de Fubini.

b. On a

$$\phi(\Xi) = \int_1^{\Xi} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x) e^{-i2\pi x\xi}}{\xi}\, dx \right) d\xi.$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $(x, \xi) \mapsto f(x) e^{-i2\pi x\xi}/\xi$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times [1, \xi]$. D'après le théorème de Fubini on a donc

$$\phi(\Xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^{\Xi} \frac{e^{-i2\pi\, x\xi}}{\xi}\, d\xi \right) f(x)\, dx$$

et, d'après la formule du changement de variable,

$$\phi(\Xi) = \int_{\mathbb{R}} (\theta(\Xi x) - \theta(x)) f(x)\, dx.$$

D'après la première question et d'après le théorème de convergence dominée, ϕ a donc une limite finie en l'infini.

c. Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction intégrable f dont la transformée de Fourier soit g. D'après la question précédente, la fonction ϕ associée a une limite finie en $+\infty$. Or, pour $\Xi \geq 1$,

$$\phi(\Xi) = \int_1^{\Xi} \frac{d\xi}{\xi \ln \xi},$$

et cette intégrale (de Bertrand) diverge. Donc g n'est pas une transformée de Fourier.

4. Équation de propagation.

Correction.

a. Par hypothèse, $(1+||u||^2)\hat{f}$ est $\lambda_n(du)$-intégrable, donc $\hat{f}$ elle-même l'est, et d'après le théorème d'inversion de Fourier on a

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle} \hat{f}(u,t)\, du.$$

En outre, $||u||\,|\hat{f}| \leq (1+||u||^2)\hat{f}$ donc $||u||\,\hat{f}$ aussi est intégrable. Donc f est différentiable (ce que l'on avait supposé), et surtout ses dérivées s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle} (2i\pi u_j)\hat{f}(u,t)\, du.$$

Mais l'hypothèse selon laquelle $(1+||u||^2)\hat{f}$ est $\lambda_n(du)$-intégrable permet de dériver cette expression sous l'intégrale une fois de plus, et de trouver :

$$\Delta f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle} (-4\pi^2||u||^2)\hat{f}(u,t)\, du.$$

Un raisonnement analogue montre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}(u,t)\, du.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle} \left(-4\pi^2||u||^2\hat{f}(u,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}(u,t) \right) du = 0.$$

On a donc

$$4\pi^2 c^2 ||u||^2 \hat{f}(u,t) + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}(u,t) = 0$$

du-presque partout, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette équation est une famille paramétrée par u d'équations différentielles de fonction inconnue $\hat{f}(u,\cdot)$. Sa solution générale s'écrit

$$\hat{f}(u,t) = a(u)\exp(2i\pi c||u||t) + b(u)\exp(-2i\pi c||u||t),$$

où a et b sont deux fonctions réelles ne dépendant que de u.

Or $\hat{f}$ vérifie les conditions initiales :

$$\hat{f}(\cdot,0) = \hat{f}_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\cdot,0) = \hat{g}_0.$$

Donc

$$a+b = \hat{f}_0 \quad \text{et} \quad 2i\pi c||u||(a-b) = \hat{g}_0,$$

soit

$$\hat{f}(u,t) = \hat{f}_0(u)\cos(2\pi c||u||t) + \frac{\hat{g}_0}{2\pi c||u||}\sin(2\pi c||u||t).$$

b. Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle u,x\rangle} \left(\hat{f}_0(u)\cos(2\pi c||u||t) + \frac{\hat{g}_0}{2\pi c||u||}\sin(2\pi c||u||t) \right) du.$$

N.B. : Cette formule garde un sens quand $\hat{f}_0$ et $\hat{g}_0$ sont intégrables, sans hypothèses de régularité supplémentaires sur f. En particulier, si on définit la fonction f par cette égalité, f n'a pas de raison, en général, d'être de classe C^2. Une telle fonction s'appelle une *solution faible* de l'équation de propagation.

5. Équation de diffusion de la chaleur.

Correction.

a. On veut définir la fonction $\widehat{u}$ par la formule

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x) e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx.$$

Quels que soient $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto u(t,x)e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}$ est continue, donc borélienne ; de plus, elle est continue et à support compact, donc intégrable. Donc l'intégrale précédente existe. Comme u est de classe C^∞, pour les mêmes raisons les fonctions Δu et $\partial u/\partial t$ sont intégrables et leur transformée de Fourier existe.

b. De même, la transformée de Fourier de $\partial^2 u/\partial x_1^2$ existe et le théorème de Fubini montre que l'on a

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(t,x) e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx_1 \right)\, dx_2 \otimes \ldots \otimes dx_n.$$

En tenant compte du fait que u est à support compact, deux intégrations par parties montrent alors que l'on a

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}}(t,\xi) = -4\pi^2 \xi_1^2 \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x) e^{-i2\pi\, x\cdot\xi}\, dx.$$

En faisant de même pour les autres dérivations partielles, on obtient

$$\widehat{\Delta u}(t,\xi) = -4\pi^2 \left(\sum_{1\le j\le n} \xi_j^2 \right) \widehat{u}(t,\xi) = -4\pi^2 \left\|\xi\right\|^2 \widehat{u}(t,\xi).$$

c. Le théorème de dérivation sous le signe somme montre que

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}.$$

Or le membre de gauche est égal à $\widehat{\Delta u}$. Donc

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -4\pi^2 \left\|\xi\right\|^2 \widehat{u}.$$

d. D'après l'équation différentielle précédente, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ il existe un réel $k(\xi)$ tel que

$$\widehat{u}(t,\xi) = k(\xi)\, e^{-4\pi^2 \|\xi\|^2 t}.$$

Or $\widehat{u}$ est continue à droite en $t = 0$, donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre on a

$$\widehat{u}(t,\xi) \to_{t\to 0^+} k(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi).$$

Donc

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{-4\pi^2 \|\xi\|^2 t}.$$

e. Posons $v(t,x) = \left(\mathcal{N}(t,\cdot) * \varphi\right)(x)$. Comme la transformation de Fourier transforme un produit en un produit de convolution on a

$$\widehat{v}(t,\xi) = \widehat{\mathcal{N}}(t,\xi)\widehat{\varphi}(\xi).$$

Or un calcul classique montre que

$$\widehat{\mathcal{N}}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 t \|\xi\|^2}.$$

Donc

$$\widehat{v}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{-4\pi^2 t \|\xi\|^2} = \widehat{u}(t,\xi).$$

Par injectivité de la transformation de Fourier on voit que $u = v$.

f. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}(t, x-y)\varphi(y)\,dy,$$

donc $u(t,x)$ est strictement positive. Physiquement, c'est un phénomène remarquable que la température soit > 0 dans tout l'espace après un intervalle de temps $t > 0$ arbitrairement petit. C'est une différence importante des solutions de l'équation de la chaleur par rapport aux solutions de l'équation des ondes ; on dit que la chaleur *diffuse*, tandis que les ondes *se propagent.*

En particulier, u n'est pas à support compact, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite au début du problème. Mais tout n'est pas perdu !... parce que la formule trouvée (S) a une portée plus générale, qui va être décrite en partie dans les questions qui suivent.

g. On a

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}(t, x-y)\varphi(y)\,dy,$$

où $\mathcal{N}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ et où φ est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Le théorème de dérivation sous le signe d'intégration montre par récurrence que u est de classe C^∞. En effet, à chaque étape l'intégrande est le produit de $\mathcal{N}$ par φ et par une fraction rationnelle n'ayant de pôle qu'en $t = 0$; or un telle fonction est dominée (uniformément sur tout compact) par une fonction indépendante de t et de x et intégrable par rapport à y et est dérivable par rapport à t et à x.

Ce dernier théorème montre du même coup que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t}(t, x-y) - \Delta \mathcal{N}(t, x-y) \right) \varphi(y)\,dy.$$

Mais un calcul direct montre que $\mathcal{N}$ est solution de l'équation de la chaleur, et donc que le terme entre parenthèses dans l'intégrale s'annule. Donc u elle-même est solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$.

Quant aux temps négatifs, on peut d'abord remarquer que la formule donnant $\mathcal{N}$ contient $\sqrt{t}$, donc n'est plus uniquement définie si $t < 0$. On peut cependant choisir une détermination de la racine. Mais alors la fonction $\mathcal{N}$ tend vers l'infini quand t tend vers 0, et n'est pas intégrable quand t est négatif. Donc le produit de convolution dans la formule donnant u n'est pas défini, en général, pour $t < 0$.

h. Comme le produit de convolution est commutatif et comme

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/(4t)}\,dy = 1$$

on a

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot) - \varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/(4t)} \left(\varphi(\cdot - y) - \varphi\right)\,dy \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/(4t)} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|\,dx\,dy \\
&\leq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2/2} \left\| \varphi(\cdot - \sqrt{t}z) - \varphi(\cdot) \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}\,dz.
\end{aligned}$$

La continuité des translations dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ montre que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lim_{t \to 0} \left\| \varphi(\cdot - \sqrt{t}z) - \varphi(\cdot) \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

L'inégalité

$$\left\| \varphi(\cdot - \sqrt{t}z) - \varphi \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2\,\|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$$

permet donc d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot)-\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

i. Le théorème de Fubini montre que quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$.

j. Comme la transformation de Fourier est une isométrie de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{e^{t\Delta}\varphi}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{\varphi}(\cdot)e^{-4\pi^2 t\|\cdot\|^2}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc

$$\left\|e^{t\Delta}\varphi\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|e^{-4\pi^2 t\|\cdot\|^2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ceci montre que l'opérateur $e^{t\Delta}$ se prolonge en un opérateur continu $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Comme l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, un tel prolongement est unique.

k. Par continuité de la transformation de Fourier sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, quelle que soit $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\widehat{e^{t\Delta}\varphi}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2}.$$

Or la fonction $e^{-t\|\cdot\|^2}$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Donc la fonction $\widehat{e^{t\Delta}\varphi}(t,\cdot)$ est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et la formule d'inversion de Fourier s'applique :

$$e^{t\Delta}\varphi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2} e^{i\,x\cdot\xi}\,d\xi.$$

Par application du théorème de dérivation sous le signe d'intégration, on vérifie directement que la fonction $u : (t,x) \mapsto e^{t\Delta}\varphi(t,x)$ est de classe C^∞ et satisfait l'équation de la chaleur. De plus, le théorème de convergence dominée montre comme précédemment que l'on a

$$\|u(t,\cdot)-\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \to_{t\to 0^+} 0.$$

l. La mesure de Dirac δ_0 est un élément neutre de la convolution, donc si $\varphi = \delta_0$ la formule donne $u = \mathcal{N}$. Autrement dit, la fonction $\mathcal{N}$, qui fournit la solution générale par convolution avec la condition initiale φ, peut elle-même être obtenue en remplaçant la condition initiale par la mesure δ_0. On la qualifie de *solution fondamentale*, et, dans le cas de l'équation de la chaleur, de *noyau de la chaleur*. Le noyau de la chaleur peut aussi être vu comme la loi d'un mouvement brownien, ce qui établit un lien fondamental avec la théorie des Probabilités.

6. Équivalent d'une intégrale de Fresnel.

Correction.

a. Si elle existe, la transformée de Fourier de $f_t : x \mapsto e^{itx^2}$ est la fonction

$$\widehat{f_t} : u \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2} e^{i2\pi ux}\,dx.$$

Posons $h_t(x,u) = e^{itx^2} e^{i2\pi ux}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_t(x,u)$ est continue donc borélienne.

De plus on a $|e^{itx^2} e^{i2\pi ux}| = e^{-t_2 x^2}$, avec par hypothèse $t_2 > 0$; donc $x \mapsto e^{itx^2} e^{i2\pi ux}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f_t}$ existe.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u \in \mathbb{R} \mapsto h_t(x,u)$ est dérivable et dominée par une fonction intégrable indépendante de u (voir la majoration ci-dessus) ; sa dérivée elle-même vérifie l'estimation

$$\left|\frac{\partial h_t}{\partial u}(x,u)\right| = \left|i2\pi x\, e^{itx^2}\, e^{i2\pi ux}\right| = \left|i2\pi x e^{-t_2 x^2}\right|,$$

où le membre de droite est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\widehat{f_t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\widehat{f_t}'(u) = i2\pi \int_{\mathbb{R}} x\, e^{itx^2}\, e^{i2\pi ux}\, dx.$$

b. Une intégration par parties montre qu'on a

$$\widehat{f_t}'(u) = -i2\pi^2 \frac{u}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2}\, e^{i2\pi ux}\, dx = -a\frac{u}{t}\widehat{f_t}'(u), \quad a = 2\pi^2 i.$$

Donc il existe un nombre complexe b tel que

$$\widehat{f_t}(u) = be^{-i2\pi^2 u/t}.$$

c. Ce nombre vaut

$$b = \widehat{f_t}(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx^2}\, dx,$$

donc avec l'astuce classique suggérée dans l'énoncé on voit que

$$b^2 = \int_{[0,2\pi]} \int_0^\infty e^{itr^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{i\pi}{t}.$$

Donc

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4}\ .$$

L'indétermination sur la racine carré du nombre complexe t se lève en remarquant que b dépend continûment de t et que quand t est imaginaire pur on a $b > 0$; donc si $t = \tau e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]0, \pi[$ on a

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{i(\pi/4 - \tau/2)}.$$

Finalement,

$$\widehat{f_t}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} e^{-i2\pi^2 u/t}.$$

d. D'après les hypothèses, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\phi'(x) = i2\pi \int_{\mathbb{R}} u\hat{\phi}(u) e^{i2\pi xu}\, du.$$

e. Comme la transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces de Hilbert $L^2(dx) \to L^2(du)$, et comme à la fois $x \mapsto e^{itx^2}$ et $x \mapsto \phi(x)$ sont dans $L^2(dx)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{itx^2}\, \phi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_t}(u)\hat{\phi}(u)\, du \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - i2\pi^2 \frac{u}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \hat{\phi}(u)\, du \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(u)\, du - \frac{i2\pi^2}{t} \int_{\mathbb{R}} u\hat{\phi}(u)\, du + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\pi/4} \left(\phi(0) - \frac{\pi}{t}\phi'(0) + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

7. Rotations irrationnelles et séries de Fourier.

Correction.

a. Soit φ une fonction mesurable quelconque définie sur $[0, 1/2[$. On peut alors prolonger φ en une fonction définie sur E et f-invariante, avec $\alpha = 1/2$, en posant, pour tout $x \in [1/2, 1[$, $\varphi(x) = \varphi(x - 1/2)$.

b. Notons $\hat{\varphi}_n$ et $\widehat{\varphi \circ f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de φ et de $\varphi \circ f$. On a

$$\widehat{\varphi \circ f}_n = \int_0^1 \varphi(x+\alpha) e^{-i2\pi n x}\, dx = \int_0^1 \varphi(x) e^{-i2\pi n(x-\alpha)}\, dx = \hat{\varphi}(n) e^{i2\pi n\alpha}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left(1 - e^{i2\pi n\alpha}\right) \hat{\varphi}_n = 0.$$

Si α est irrationnel, le facteur entre parenthèses ne s'annule que pour $n = 0$. Donc, pour tout entier relatif non nul n, $\varphi_n = 0$. Donc, d'après le théorème d'injectivité appliqué à $\varphi - \hat{\varphi}_0$, λ-presque partout on a $\varphi - \hat{\varphi}_0 = 0$. Donc φ est constante sur E.
d. Si A est presque partout invariante, la fonction $\mathbb{1}_A$ est presque f-invariantes : $\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_A$ presque partout. (Comme $\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}$, ceci signifie que, à un ensemble négligeable près, $f^{-1}(A) = A$).

Si de plus α est irrationnel, $\mathbb{1}_A$ est donc constante presque partout. Donc A est de mesure égale à 0 ou à 1.
e. Si A est presque f-invariante, $f^{-1}(A) = A$ presque partout. Autrement dit, à un ensemble négligeable près, les seuls points qui arrivent dans A sont les points de A eux-mêmes, et tous ces points. Donc, f induit une application de A dans lui-même, par simple restriction.

Si f est ergodique, les seules parties A presque invariantes sont négligeables ou de complémentaire négligeable. Donc l'ergodicité est une propriété d'indécomposabilité dynamique de f relativement à μ.

8. Théorème central limite.
Correction.
a. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $|y| \le 1 + y^2$, donc

$$\int_E |f_n|\, d\mu \le \int_E (1 + f_n^2)\, d\mu.$$

Or par hypothèse μ est une probabilité, donc $\int_E d\mu = 1$, et $f_n \in L^2(\mu)$, donc $\int_E {f_n}^2\, d\mu < \infty$. Donc $\int_E |f_n|\, d\mu < \infty$, c'est-à-dire que f_n est intégrable.
b. Pour tout pavé borélien $(A_1, ..., A_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\left((f_1, ..., f_n)_* \mu\right)(A_1 \times ... \times A_n) &= \mu\left((f_1, ..., f_n)^{-1}(A_1 \times ... \times A_n)\right) \quad \text{(par définition)} \\
&= \mu\left(f_1^{-1}(A_1)\right) ... \mu\left(f_n^{-1}(A_n)\right) \quad \text{(indépendance)} \\
&= (f_{1*}\mu)(A_1) ... (f_{n*}\mu)(A_n) \quad \text{(par définition).}
\end{aligned}$$

Or cette propriété caractérise la mesure produit $(f_{1*}\mu) \otimes ... \otimes (f_{n*}\mu)$. Donc on a l'égalité demandée.
c. Dans le cas $n = 2$ on a :

$$\int_E h(f_1(x), f_2(x))\, d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(y_1,y_2)\, d((f_1,f_2)_*\mu)(y_1,y_2) \quad \text{(intégration par rapport à la mesure image)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(y_1,y_2)\, d((f_{1*}\mu)\otimes(f_{2*}\mu))(y_1,y_2) \quad \text{(d'après la question précédente)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(y_1,y_2)\, d(f_{1*}\mu)(y_1)\right) d(f_{2*}\mu)(y_2) \quad \text{(théorème de Fubini)}\\
&= \int_E \left(\int_E h(f_1(x_1),f_2(x_2))\, d\mu(x_1)\right) d\mu(x_2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(intégration par rapport aux mesures images)}\\
&= \int_{E^2} h(f_1(x_1),f_2(x_2))\, d\mu^{\otimes 2}(x_1,x_2) \quad \text{(théorème de Fubini).}
\end{aligned}
$$

Donc, si f_1 et f_2 sont deux fonctions indépendantes, l'intégrale de n'importe quelle fonction $h(f_1,f_2)$ ne dépend pas du fait que l'on fait varier les arguments de f_1 et de f_2 de façon simultanée ou découplée.

La formule générale pour n quelconque se déduit ensuite du cas $n=2$ par une récurrence facile, qui utilise l'associativité du produit tensoriel.

d. Comme les fonctions f_n sont mesurables, il en est de même de S_n. Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction complexe $y \mapsto e^{-2i\pi yu}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc borélienne. Donc, en tant que composée de deux fonctions mesurables, la fonction complexe $x \mapsto e^{-2i\pi S_n(x)u}$ est mesurable.

De plus,

$$\int_E |e^{-2i\pi S_n(x)u}|\, d\mu(x) \leq \int_E d\mu = 1.$$

Donc, d'après le rappel du début de l'énoncé, la fonction $y \mapsto e^{-2i\pi yu}$ est σ_n-intégrable. Donc la fonction $\hat{\sigma}_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto e^{-2i\pi yu}$ est continue et dominée, en module, par la fonction constante égale à 1, qui est elle-même intégrable. Donc, $\hat{\sigma}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

e. La transformée de Fourier de σ_n est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_n(u) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi ux)\, d\sigma_n(x)\\
&= \int_E \exp\left(-2i\pi\frac{u}{\sqrt{n}}(f_1(x)+\ldots+f_n(x))\right) d\mu(x)\\
&= \int_{E^n} \exp\left(-2i\pi\frac{u}{\sqrt{n}}(f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n))\right) d\mu^{\otimes n}(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{(question (c))}\\
&= \left(\int_E \exp\left(-2i\pi\frac{u}{\sqrt{n}}f_1(x_1)\right) d\mu(x_1)\right)\ldots\left(\int_E \exp\left(-2i\pi\frac{u}{\sqrt{n}}f_n(x_n)\right) d\mu(x_n)\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(théorème de Fubini)}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2i\pi\frac{u}{\sqrt{n}}y\right) d\nu(y)\right)^n \quad \text{(distribution identique)}\\
&= \hat{\nu}\left(u/\sqrt{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

(ce qui prouve au passage que la fonction $\hat{\nu}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, ce qui peut aussi se voir directement, avec les mêmes arguments que pour $\hat{\sigma}_n$ à la question précédente).

f. On a

$$\hat{\nu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yu}\, d\nu(y) = \int_E e^{-2i\pi f_1(x)u} d\mu(x).$$

Pour tout $x \in E$, la fonction complexe $g_x : u \mapsto e^{-2i\pi f_1(x)u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, ${g_x}' : u \mapsto -2i\pi f_1(x) e^{-2i\pi f_1(x)u}$, satisfait :

$$|{g_x}'(u)| \leq 2\pi |f_1(x)|,$$

cette dernière fonction étant intégrable d'après la question (a). Donc la fonction $\hat{\nu}$ est dérivable, de dérivée

$$\hat{\nu}'(u) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} y e^{-2i\pi y u}\, d\nu(y).$$

En dérivant une fois de plus on voit que ν est de classe C^2 et que sa dérivée seconde vaut

$$\hat{\nu}''(u) = -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-2i\pi y u}\, d\nu(y).$$

g. Le théorème de Taylor-Young s'écrit, à l'ordre deux :

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(u) &= \hat{\nu}(0) + \hat{\nu}'(0)u + \hat{\nu}''(0)\frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\nu(y) - 2i\pi \int_{\mathbb{R}} y\, d\nu(y)\ u - 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} y^2\, d\nu(y)\ \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= 1 - 2\pi^2 u^2 + o(u^2). \end{aligned}$$

h. D'après les questions (e) et (g), quand u est fixé et n tend vers l'infini, on a

$$\hat{\sigma}_n(u) = \hat{\nu}\left(u/\sqrt{n}\right)^n \to \zeta(u) = e^{-2\pi^2 u^2}.$$

Donc la limite simple de la fonction $\hat{\sigma}_n$ est la gaussienne $\zeta : u \mapsto e^{-2\pi^2 u^2}$.

i. On a

$$\sigma(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi u y} e^{-2\pi^2 u^2}\, dy$$

(cette formule montre que σ est la transformée de Fourier inverse de ζ). Par les mêmes arguments que précédemment, cette fonction est dérivable, de dérivée

$$\sigma'(y) = 2i\pi \int_{\mathbb{R}} u e^{-2\pi^2 u^2} e^{2i\pi u y}\, du.$$

Une intégration par partie où l'on intègre $ue^{-2\pi^2 u^2}$ et dérive $e^{2i\pi u y}$ montre que $\sigma'(y) = -y\sigma(y)$. Donc il existe une constante C telle que $\sigma(y) = Ce^{-y^2/2}$. Or

$$\sigma(0) = C = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi^2 u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ;$$

la dernière égalité provient d'un calcul classique.

Finalement, σ_n tend faiblement vers la fonction

$$\sigma : y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

j. Le graphe de la fonction σ est une courbe en cloche appelée *gaussienne*.

Si une expérience est perturbée par un grand nombre de fluctuations aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, le résultat de l'expérience sera bien sûr aléatoire.

Mais le théorème central limite, démontré par les mathématiciens Lindeberg et Lévy, affirme que, si l'on répète l'experience un grand nombre de fois, la probabilité d'obtenir tel ou tel résultat est soumise à une loi gaussienne.