EXAMEN GENERAL DE ANÁLISIS FUNCIONAL I

Instrucciones:

$\heartsuit$**:** El examen tiene una duración de 4 horas y media.

$\spadesuit$**:** El total de puntos en el examen es 60. Para aprobar el examen general se necesitan obtener al menos 42 puntos.

Problemas

1. (10 puntos) Sean $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión fija y c_0 el espacio de sucesiones reales convergentes a 0. Para $\{x_n\} \in c_0$, definimos $T(\{x_n\}) = \{a_n x_n\}$. Demuestra que $T(c_0) \subset c_0$ si y sólo si $\{a_n\} \in \ell_\infty$.

2. Sean H un espacio de Hilbert y $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente a x. Para $y \in H$, definimos $d(y) = \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2$.

   a) (8 puntos) Demuestra que para todo $y \in H$ se tiene que $d(x) \leq d(y)$.

   b) (2 puntos) Determina cuándo se da la igualdad.

3. Sea X un espacio normado.

   a) (7 puntos) Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una base de Hamel de X. Prueba que si X es de Banach y $dim(X) = \infty$, entonces A no es numerable.

   b) (3 puntos) Sea $X = \{\{x_n\} \subset \mathbb{C} : \text{existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0, \forall n \geq N\}$. Demuestra que no existe una norma en X, tal que X sea un espacio de Banach.

4. Sea H un espacio de Hilbert complejo. Sean $a, b \in H\backslash\{0\}$ definimos $T : H \to H$ por $T(x) =< x, a > b$.

   a) (5 puntos) Encuentra T^*, el operador adjunto de T.

   b) (5 puntos) Demuestra que $T = T^*$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $b = ta$.

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a < b$. Sea $P_n[a, b]$ el espacio vectorial de polinomios reales de grado a lo más n en $[a, b]$, equipado con la norma $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$. Definimos $A_n = \{f \in P_n[a, b] : f \text{ es un polinomio mónico de grado } n\}$.

   a) (8 puntos) Determina el valor de $\inf\{\|f\| : f \in A_n\}$

   b) (2 puntos) Encuentra todos los polinomios en A_n donde este ínfimo se alcanza.

6. (10 puntos) Sea X un espacio de Banach. Sean $\{x_n\} \subset X$ una sucesión acotada y $x \in X$. Definimos $K_n = \overline{conv\{x_n, x_{n+1}, ...\}}$. Demuestra que si x_n converge débilmente a x, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.