CIMAT Examen General Julio 18, 2008

Variable Compleja

Nombre: ____

Resuelva sólo 5 problemas. Justifique sus soluciones.

1. Sean $a > 1$ un número real y $n \geq 1$ un entero. Considere la función $f(z) = z^n e^{a-z}$. Utilice el teorema de Rouché para encontrar el número de *soluciones distintas* de la ecuación $f(z) = 1$ en $|z| < 1$.

2. Denote por $\mathcal{A}$ el anillo acotado por las circunferencias $|z - 2| = 2$ y $|z| = 5$. Encuentre todas las transformaciones de Möbius que mandan a $\mathcal{A}$ en un anillo de fronteras concéntricas dadas por $|z| = 1$ y $|z| = R$, para algún $R > 0$.

3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas sobre un dominio $U \subset \mathbb{C}$. Suponga que $f_n \to f$ en la topología C^0.

   (a) Demuestre que f es analítica y que para toda $k > 0$, $f_n \to f$ en la topología C^k.

   (b) De un contraejemplo del inciso anterior para funciones f_n sobre $U \subset \mathbb{R}$ y de tipo C^∞.

4. Utilice un cambio de variable y residuos para calcular
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$$

5. Sea U un dominio acotado y $f : \mathbb{D} \to U$ conforme. Usando el Lema de Schwarz demuestre que la distancia desde el punto $f(0)$ a la frontera de U puede estimarse por
$$dist(f(0), \partial U) \leq |f'(0)|.$$

6. Demuestre que si f es una función analítica en todo el plano complejo que toma valores en un semiplano, entonces es constante.