EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA
Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT
Lunes 6 de julio de 2015

1. Sea K un campo finito. Demuestra que existen un número primo p y un número entero n tales que la cardinalidad $|K|$ de K es p^n.
2.
   a) Enuncia el Teorema Fundamental de módulos finitamente generados M sobre un dominio euclideano D y da un bosquejo de su demostración.
   b) Calcula el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 144.
3. Sea L/K una extensión de campos ($K \subset L$ y ambos son campos). Sea $\overline{K}$ la cerradura algebraica de K en L, es decir, el conjunto de elementos $x \in L$ que son algebraicos sobre K. Demuestra que $\overline{K}$ es un campo intemedio de L/K.
4. Considera la extensión de campos $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})/\mathbb{Q}$.
   a) Calcula el grado de esta extensión y explica cómo lo obtuviste.
   b) Calcula el polinomio mínimo de $\sqrt{-1} + \sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.
5. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$. ¿Cuándo sucede que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$? Explica tu respuesta. ($\mathbb{Q}(\alpha)$ denota al menor campo que contiene a $\mathbb{Q}$ y a α).