EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA
Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT
13 de enero de 2015

1. Sean a y n dos números enteros y considera el anillo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   1.1 Demuestra que $[a] \in \mathbb{Z}_n$ es una unidad (tiene inverso multiplicativo) si y sólo si a y n son primos relativos.
   1.2 Si $n = p^m$ es una potencia de un número primo p, demuestra que el número de unidades en $\mathbb{Z}_{p^m}$ es $p^{m-1}(p-1)$.
2.
   2.1 Sea $P(t) = (t^2+1)(t^2-2) \in \mathbb{Q}[t]$. Construye el menor campo $L \supset \mathbb{Q}$ tal que $P(t)$ se factoriza en producto de polinomios lineales en $L[t]$:
   $$P(t) = (t-a_1)\cdot\dots\cdot(t-a_4),\ a_1,\dots,a_4 \in L.$$
   2.2 Sean ahora K un campo y $P(t) \in K[t]$ un polinomio. Bosqueja la construcción del menor campo $L \supset K$ en el que $P(t)$ se factoriza en producto de polinomios lineales en $L[t]$.
3. Sea D un dominio entero que contiene a un campo K tal que D es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K. Demuestra que D es un campo.
4. Enuncia el Teorema Fundamental de grupos abelianos finitamente generados.
5.
   5.1 Enuncia el Teorema Fundamental de módulos finitamente generados M sobre un dominio euclideano D y da un bosquejo de su demostración.
   5.2 En términos de este Teorema (y su demostración), da una descripción del módulo M sobre $\mathbb{Z}$ definido por:
   $$M = \mathbb{Z}^{\oplus 2}/\Lambda, \text{ donde } \Lambda = < \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} > .$$