Por Ekaterina Todorova Kolkovska (Cimat)

Daniel Bernoulli (1700-1782). Credito; Imagen tomada de internet.

En 2013, el Año Internacional de la Estadística, se cumple el 300 aniversario del llamado Juego o Paradoja de San Petersburgo, importante no sólo porque coincide con el tricentenario de la publicación de *El arte de la conjetura* de Jacobo Bernoulli, sino porque el juego en sí mismo desató un intenso debate que contribuyó indirectamente a diversas áreas del conocimiento, como la teoría de la decisión, la teoría de la probabilidad y la economía.

La paradoja fue propuesta por el matemático suizo Nicolaus Bernoulli en una carta que dirigió a su colega francés Pierre de Montmort el 9 de septiembre de 1713. Dos años después, el propio Nicolaus consultó a su primo Daniel Bernoulli para encontrar una respuesta, y éste propuso una solución en 1738 en las Actas de la Academia de Ciencias de San Petersburgo; de ahí el nombre de la paradoja.

En su carta, Nicolaus Bernoulli ideó una apuesta de "volados" entre A y B donde la "ganancia esperada" para B es matemáticamente infinita. El juego consiste en que B debe pagar una suma X para poder apostar. Luego se lanza una moneda al aire tantas veces como sea necesario hasta que salga "cruz", y el juego se detiene. Entonces, se cuenta el número N de lanzamientos que se hicieron para que cayera "cruz" y A debe pagar a B una ganancia de 2N pesos. Por ejemplo, si sale "cruz" en el primer volado, B gana 2 pesos (21); si cae en el segundo lanzamiento gana 4 pesos (22) o en el tercero, 8 pesos (23), y así sucesivamente. Entre más volados se necesiten para que salga cruz, mayor será la ganancia, pero menor la posibilidad de que ocurra. Teóricamente, la cruz puede salir en el volado número 1, en el 50, o en el 437. En general, una apuesta es favorable al jugador si la cantidad exigida para entrar a jugar es menor que la ganancia esperada. No obstante, al calcular matemáticamente la ganancia esperada para el juego de San Petersburgo, resulta que ésta es infinita, lo que significa que teóricamente la apuesta siempre es favorable en relación al precio X que debe pagarse por entrar.

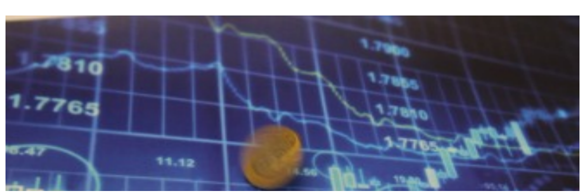
La paradoja plantea varias inconsistencias, pues en realidad el jugador B sólo está dispuesto a pagar una pequeña cantidad X y, por otro lado, A tendría que tener disponible un monto infinito de dinero para enfrentar una ganancia que teóricamente no tiene tope. Entonces, ¿cuál es el precio justo que B debería pagar para entrar al juego sin la que la apuesta le sea desfavorable? ¿Cuánto debe tener A en realidad para enfrentar los gastos de esta apuesta?

La paradoja muestra, además, que tomar la simple ganancia esperada como criterio de decisión no siempre es racional en la realidad.

Desde el siglo XVIII y hasta nuestros días muchos matemáticos importantes han buscado una solución completamente satisfactoria a esta paradoja. Algunos de ellos fueron los propios Daniel y Nicolás Bernoulli, además de D'Alambert, Lagrange, Bertrand, Euler, Laplace, Borel, Buffon, Poisson, De Morgan, von Mises, P. Levy y Khinchin. De ellos surgieron propuestas con un gran número de soluciones, cada una de ellas sin resolver completamente la paradoja. Una de las primeras dificultades fue que las nociones de esperanza y espacios de probabilidad infinitos no fueron definidas formalmente hasta que Kolmogorov las introdujo axiomáticamente en 1933.

Una solución de la paradoja llegó en 1945 de parte del matemático norteamericano William Feller, quien usó la demostración de una ley débil de grandes números que había propuesto en 1937.

Feller planteó permitir un número finito, pero suficientemente grande de N repeticiones del juego. Entonces, el precio justo de cada juego seria log N, el logaritmo con base 2 de N. Así, el precio justo que pagaría el jugador por repetir el juego 1,024 veces, sería de 10 monedas. Feller demostró también que no se tiene una convergencia casi segura bajo ninguna normalización.



La paradoja de San Petersburgo tiene gran importancia porque fomentó el desarrollo acelerado de ideas en el área de probabilidad y en la teoría económica del siglo XX. Por ejemplo, el planteamiento que hizo Karl Menger sobre este tema en 1934 llevó al matemático John von Neumann y al economista Oskar Morgenstern a proponer diez años después la teoría económica de utilidades bajo riesgo y la base de investigación interdisciplinaria de la teoría de juegos.

Si está interesado en ampliar la información, dé click aquí.

* La Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska es investigadora titular “A” del área de Probabilidad y Estadística en el Centro de Investigación en Matemáticas (Cimat), en Guanajuato, Gto. Uno de los intereses de Katia en los últimos cinco años ha sido la aplicación de probabilidad dentro de la matemática financiera moderna. Informes y comentarios a este correo.

***

Para más información de las actividades que desarrolla el Sistema de Centros Públicos de Investigación Conacyt, consulte las páginas México CyT y Emisión Revista México CyT; asimismo, le invitamos a escuchar el programa "Radio 110 grados, El cuadrante científico", transmitido cada lunes a las 14 horas (tiempo del centro).

El *blog Con-Ciencia* está en facebook y en twitter. ¡Síganos!

***

El Centro de Investigación en Matemáticas (Cimat) ha publicado también en el *blog* "Con-Ciencia" los siguientes artículos:

- Christen Gracia, José Andrés (Cimat). La teoría bayesiana, otra forma de hacer estadística. 7 de mayo de 2013.
- Barradas Bribiesca, José Ignacio (Cimat). Ser cuadrado no siempre es tan malo. 17 de enero de 2012.
- Hernández Lamoneda, Luis (Cimat). ¿Cuánto vale Pi?. 15 de marzo de 2011.
- Solís Lozano, Francisco Javier (Cimat). La matemática, una herramienta en la lucha contra el cáncer. 1 de febrero de 2011.
- Rivera Meraz, Mariano J. J. (Cimat). Algoritmo para colorear imágenes o películas y la industria del entretenimiento. 19 de octubre de 2010.